

Deelexamen 2

Menselijke creaturen

Januari 2021

Woord vooraf

Dit examen vond in tegenstelling tot deelexamen 1 wel op de campus plaats. Je kon dus wel al je berekeningen afgeven.

Vraag 1 (1,5 + 1,5 + 3 punten)

Pringles chips hebben de vorm van een hyperbolische paraboloid, met vergelijking

$$z(x, y) = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{a^2}$$

Met als begrenzing $x^2 + \frac{y^2}{2} \leq q^2$

1a

- * Bepaal de maximale waarde van q als de chips in een cilindervormige doos met straal $r = 2$ moet passen.
- * Verklaar kort waarom de hoogte van een Pringle-chips $\Delta z = 2$. Hier volstaat een korte redenering. (voor $a = \sqrt{2}$)

1b

De chips worden na het bakken bestrooid met kruiden, die verticaal vallen langs de $z - as$, met een hoeveelheid k per oppervlakte-eenheid.

- * Stel een functie $f(x, y)$ op die de dichtheid van de kruiding per oppervlakte weergeeft.

1c

De nieuwe vorm heeft als begrenzing van het domein $x^2 + y^4 - by^2 = 1$ (met $a = \sqrt{2}$). Bepaal de mogelijke waarden van b als je weet dat het maximum op de y -as ligt, maar het minimum niet op de x -as.

Vraag 2

Gegeven volgende kromme.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

Deze kan je beschouwen als een functie: z in functie van (x,y) .

2a

Bepaal het domein van de functie. Geef ook het bereik van de kromme. Let op dat je ze niet veralgemeent!

2b

Bepaal het raakvlak aan de grafiek in het willekeurig punt $P(x_0, y_0)$ van het domein.

2c

Toon aan dat de som van de segmenten die het raakvlak (uit vraag 2b) afsnijdt van de coördinaatassen in elk punt constant is.

Vraag 3

De luchtdruk wordt gegeven door volgende functie:

$$P(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$$

De wind waait altijd van een hogedrukgebied naar een lagedrukgebied. Neem aan dat de luchtdruk constant blijft doorheen de tijd en dat deze op elke hoogte gelijk is. Een luchtballon volgt natuurlijk de richting van de maximale windkracht.

3a

Bepaal de richting waarin de ballon beweegt in het punt $(4, 1)$.

3b

Bepaal de kromme die de ballon zal afleggen doorheen de tijd.

3c

Na lange tijd, in welk punt zal de ballon uitkomen? (Een eenvoudige redenering volstaat hier.)

Vraag 4 (3 punten)

Stel $F(x) = \int_0^{3x^2} (\sin(t^2) - \cos(t)) dt$. Bepaal dan de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + F(x)}{9x^6}$$

Vraag 5 (3 punten)

Bepaal een Maclaurinreeks voor de functie $f(x) = (1-x)\cos^2(x)$. Geef ook het bijhorende convergentie-interval.

Oplossingen

- (a) q is maximaal $\sqrt{2}$
(b) Iets met de grootte van de gradiënt?

$$\rho(x, y) = \frac{k}{|\nabla f(x, y)|} = \frac{k}{\sqrt{(-x)^2 + (\frac{y}{2})^2}}$$

(c) ...

- (a) Het bereik van de functie is het interval $[0, a]$. Het domein is de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2,+} | \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}\}$
(b) Het raakvlak in $P(x_0, y_0)$ van het domein is

$$L(x, y) = (\sqrt{a} - \sqrt{x_0} - \sqrt{y_0}) \left(\sqrt{a} - \frac{x}{\sqrt{x_0}} - \frac{y}{\sqrt{y_0}} \right)$$

(c) De constante waarde van de som is a .

- (a) De richtingsafgeleide in $(4, 1)$ is $-\nabla P(4, 1) = -8\hat{i} - \hat{j}$.
(b) De vergelijking van de curve is $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$
(c) Op het punt met de laagste luchtdruk.

- De limiet is $\frac{3}{2}$.

- Een mogelijke Maclaurinreeks is:

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} (x^{2n} - x^{2n+1}).$$

Ze convergeert over heel $\mathbb{R}$.