examen complexe analyse Kortrijk

2e bach wisk 2014-2015

18-6-2015

1 Mondeling

Geef het verband tussen analytische en differentieerbare functies.

Antw

Analytische functies zijn hetzelfde als complex differentieerbare functies.

2 Schriftelijk

1. Bereken de integraal van $\frac{1}{(z-3)(z^m-1)}$ over de rand van de schijf rond nul met straal 2.
2. Bestaat er een meromorfe functie f van eenheidsschijf naar $\mathbb{C}$ die voldoet aan $f(1/(2n)) = f(1/(2n+1)) = 1/(2n)$ voor alle natuurlijke getallen n verschillend van nul.
3. Geef de laurentseries van $\frac{b-a}{(z-a)(z-b)}$ in de ring $|a| < |z| < |b|$.
4. Als $f(z) = sin(z)/(z(z-i-1)^2)$ wat is dan convergentiestraal van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{(n!)^k}(z+1)^n$, met k een vast getal uit $\{1, 2, 3, ..\}$.
5. Geef de verzameling van alles wat conformal equivalent is met $\mathbb{C}$.
6. Geef alle mogelijke analytische functies (zoals gedefinieerd in sectie 3.3) op heel $\mathbb{C}$ die voldoen aan $f(0) = 0$ en $f \circ f$.

Antw

1. Wegens de residuestelling, geldt dat de integraal gelijk is aan $2\pi i \sum Res(f, w_k)$ Ieder residue is gelijk aan $\frac{1}{mw_k^{m-1}(w_k-3)} = -\frac{w_k}{3m}\frac{1}{1-\frac{w_k}{3}} = \sum -\frac{1}{m}\left(\frac{w_k}{3}\right)^n$ De som van al deze residus is gelijk aan $-\sum_{k>0}(\frac{1}{3})^{mk} = \frac{1}{1-3^m}$. De integraal is dus gelijk aan $\frac{2\pi i}{1-3^m}$.

2. Neen. Merk op dat voor $x_n = \frac{1}{2n}$ geldt dat $f(x_n) = x_n$. Wegens de identity theorem/ uniqueness principle (stelling 3.4.1) geldt dan dat f de identieke functie moet zijn op de eenheidsschijf. Wanneer we dit doen $x_n = \frac{1}{2n+1}$ geldt dat $f(x_n) = \frac{x_n}{1-x_n}$ Dit geeft een contradictie.

3. Merk op dat $\frac{b-a}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}$.

   Voor $|a| < |z| < |b|$ geldt dat

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}} = -\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{b})^n$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{a}{z})^n$$

   Bijgevolg vinden we dat $\frac{b-a}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ waarbij $c_n = -\frac{1}{b^{n+1}}$ als $n \geq 0$ en $c_n = -a^{-n-1}$ als $n \leq -1$.

4.

5. We weten uit de Riemann mapping theorem dat dit alle gebieden zijn van $\hat{\mathbb{C}}$ waarvan exact één punt ontbreekt.

6. We merken dat f bijectief is en dus een conformal mapping en dat $f(x) = \pm x$ de enige twee functies zijn die voldoen. Dit omdat $f(x) = ax + b$ met $b = f(0) = 0$ en dus $a^2 = 1$.

   Merk op dat zonder de twee extra voorwaarden bvb. $f(x) = -x + 1$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ ook voldoen aan $f \circ f$.