Deelexamen Calculus 1 21/10

1. Gegeven de functie $y(x)$ waarvoor
$$y\,e^y = e^{x+1}$$
   (a) Bereken de afgeleide y' voor een punt (x, y) dat voldoet aan het functievoorschrift.
   (b) Gebruik de gevonden uitdrukking om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(0, 1)$ op te stellen.
   (c) Gebruik de gevonden uitdrukking om de vergelijking van de rechte door (e, e) op te stellen, die loodrecht staat op de raaklijn in datzelfde punt (e, e).
   (d) Bereken de limiet
$$\lim_{x\to-\infty} y(x)$$

(2.5 ptn)

Antwoord:

(a) We leiden beide zijden van deze vergelijking impliciet af. Dit leidt tot
$$y'e^y + y\,e^y\,y' = e^{x+1}.$$
Deze vergelijking kunnen we oplossen naar y'. Dit geeft de afgeleide in een willekeurig punt:
$$y' = \frac{1}{y+1}\,e^{x+1-y}. \tag{1}$$

(b) Evalueer uitdrukking (1) in het punt $P(0, 1)$. Dit geeft $y'|_P = \frac{1}{2}$ zodat de vergelijking van de raaklijn gegeven wordt door
$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

(c) Evalueer nu uitdrukking (1) in het punt $Q(e, e)$. Dit leidt tot $y'|_Q = \frac{e}{e+1}$. De rechte met vergelijking $ax + b$ staat loodrecht op de raaklijn in Q als en slechts als $a \cdot y'|_Q = -1$. Dus $a = -\frac{e+1}{e}$ en de vergelijking van de rechte door Q loodrecht op de raaklijn wordt gegeven door
$$y = -\frac{e+1}{e}\,(x-e) + e = -\frac{e+1}{e}\,x + 2e + 1.$$

(d) Aangezien de gelijkheid uit de opgave geldig is voor alle $x \in \mathbb{R}$ (we hebben immers een gelijkheid van functies), moeten de limieten voor $x \to -\infty$ van beide leden ook gelijk zijn:
$$\lim_{x\to-\infty} \left(y(x)\,e^{y(x)}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0. \tag{2}$$
Er zijn dus twee mogelijkheden: ofwel is $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$, ofwel is $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$. In dit laatste geval zou immers de exponentiële functie sneller naar nul gaan dan $|y(x)|$ naar oneindig. Merk nu op dat het bereik van het rechterlid gelijk is aan $]0, +\infty[$. Dit betekent dat ook het bereik van het linkerlid hieraan gelijk moet zijn. Omdat $e^{y(x)} > 0$, impliceert dit dat $y(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. De limietwaarde $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ kan dus niet gelijk zijn aan $-\infty$. We besluiten dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

2. Gegeven de functie

$$y = \arccos(\ln(x^2+1))$$

   (a) Bepaal het domein van deze functie $y(x)$. Argumenteer dat het een even functie betreft. Bepaal ook het bereik van de functie.
   (b) Bereken de afgeleide van de functie voor een punt uit het domein. Wat is er bijzonder aan de randpunten van het domein?
   (c) Toon aan dat de functie een maximum bereikt op haar domein.
   (d) Leg uit waarom geldt dat er punten $x_0, x_1 \in]-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}[$ bestaat zodat $y'(x_0) = -\frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}$ en $y'(x_1) = \frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}$.

(2.5 ptn)

Antwoord:

(a) Het domein van de functie $x \mapsto \arccos x$ is $[-1, 1]$. Omdat $\ln(x^2+1) \geq 0$ voor alle reële waarden van x, moeten we enkel eisen dat $\ln(x^2+1) \leq 1$. Dit levert $x^2+1 \leq e$ of $x \in [-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}]$.
Het even zijn van de functie $y(x)$ volgt in essentie uit het feit dat x^2 een even functie is. Inderdaad, $\arccos(\ln((-x)^2+1)) = \arccos(\ln(x^2+1))$.
Ten slotte vinden we, aangezien $\ln(x^2+1) \geq 0$, dat het bereik van $y(x)$ gelijk is aan het bereik van de boogcosinusfunctie voor positieve waarden van het argument. Het bereik van $y(x)$ is dus gelijk aan $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) We vinden de afgeleide van y' via de kettingregel:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{1-[\ln(x^2+1)]^2}}.$$

Deze formule is geldig in het interval $]-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}[$. De afgeleiden in de eindpunten bestaan niet. We hebben $\lim_{x \to -\sqrt{e-1}} y'(x) = +\infty$ en $\lim_{x \to \sqrt{e-1}} y'(x) = -\infty$, zodat de raaklijn aan de grafiek van de afgeleide functie neigt naar een verticale rechte als we de eindpunten van het domein naderen.

(c) Het domein van de functie $y(x)$ is een gesloten interval. Bovendien is y continu op dit interval. Wegens het Max-Min theorema volgt dat y een maximum bereikt op haar domein.

(d) Bekijk eerst het open deelinterval $]0, \sqrt{e-1}[$ van $]-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}[$. Omdat y continu is op het interval $[0, \sqrt{e-1}]$ (ze is immers een combinatie van continue functies) en afleidbaar in $]0, \sqrt{e-1}[$ (zoals we in (b) hebben aangetoond), is aan de voorwaarden van het gemiddelde-waarde theorema voldaan. Uit dit theorema volgt dat er een $x_0 \in]0, \sqrt{e-1}[$ bestaat zodat

$$y'(x_0) = \frac{y(\sqrt{e-1}) - y(0)}{\sqrt{e-1} - 0} = \frac{0 - \pi/2}{\sqrt{e-1}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}.$$

Aangezien y een even functie is, geldt dat

$$\begin{aligned} y'(-x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{-h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{-h} = -y'(x_0) = \frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}. \end{aligned}$$

Alternatief: Een volledig analoog argument als voorheen, toegepast op het interval $]-\sqrt{e-1},0[$ toont aan dat er een $x_1 \in]-\sqrt{e-1},0[$ bestaat zodat $y'(x_1)=\frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}$.

Nog een alternatief: De afgeleide y' is een continue functie waarvan we de limieten $\lim_{x\to-\sqrt{e-1}} y'(x) = +\infty$ en $\lim_{x\to\sqrt{e-1}} y'(x) = -\infty$ in vraag (2b) hebben berekend. Er bestaan dus getallen $a, b \in]-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}[$ zodat $y'(a) < -\frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}$ en $y'(b) > \frac{\pi}{2\sqrt{e-1}}$. Op het gesloten interval $[b,a]$ mogen we de tussenwaardestelling toepassen: dit levert de gezochte x_0 en x_1. Deze waarden liggen dan uiteraard ook in het interval $]-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}[$.

Puntenverdeling

- *Vraag 1a* 0.75 pt: 0.25 punten voor het idee om impliciete differentiatie te gebruiken, 0.25 punten voor het correct berekenen van de afgeleiden en 0.25 punten voor het correct oplossen van de resulterende vergelijking naar y'.

- *Vraag 1b* 0.50 pt: 0.25 punten voor het correct invullen van het punt, 0.25 punten voor correcte vergelijking van raaklijn.

- *Vraag 1c* 0.75 pt: 0.25 punten voor het idee op te schrijven dat het product van de hellingen van de raaklijn en van de normaal op die raaklijn gelijk is aan -1, 0.50 punten voor een correcte berekening van de vergelijking van de normaal.

- *Vraag 1d* 0.50 pt: Een volledig correcte redenering is 0.50 punten waard. Studenten die vergelijking (2) hebben afgeleid en correct hebben besloten dat er nog twee kandidaten zijn voor $\lim_{x\to-\infty} y(x)$, krijgen hiervoor 0.25 punten. Vergelijking (2) of een variant hiervan afleiden en vervolgens met een of andere ongeldige reden besluiten dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$, is echter geen punten waard.

- *Vraag 2a* 1.00 pt: 0.25 punten voor het aanhalen dat het domein en bereik van de functie bepaald worden door het domein en bereik van de boogcosinusfunctie en deze laatste correct opschrijven, 0.25 punten voor het correct berekenen van het domein (met inbegrip van het correct opschrijven van de redenering!), 0.25 punten voor het argument waarom $y(x)$ een even functie is en 0.25 punten voor het juiste bereik.

- *Vraag 2b* 0.50 pt: Een juiste afgeleleide is 0.25 punten waard, correct beargumenteren wat er in de randpunten gebeurt levert een extra 0.25 punten op.

- *Vraag 2c* 0.50 pt: Correct toepassen van het Max-Min theorema is 0.50 punten waard. Vele studenten hebben echter voor een andere aanpak gekozen, namelijk het verloop van de functie beschrijven via de eerste afgeleide. Dit was niet nodig (het is voldoende aan te tonen dat een maximum bestaat, onafhankelijk van waar dit wordt bereikt!), maar indien dit foutloos werd toegepast, verdient dit ook 0.50 punten. Studenten die echter hebben gezegd dat $y'(0) = 0$ en dat "daarom y' een maximum bereikt in dit punt" zonder verdere uitleg (waarom geen minimum of buigpunt?) hebben hier geen punten voor gekregen, zelfs geen 0.25.

- *Vraag 2d* 0.50 pt: Elk van bovenstaande oplossingen, indien ze correct werden beargumenteerd (dit wil in het bijzonder zeggen dat de voorwaarden van de gemiddelde-waarde stelling / tussenwaardestelling moeten nagegaan worden voordat je ze gebruikt!) is 0.50 punten waard. Het bewijs dat de afgeleide van een even functie steeds oneven is zoals hierboven gegeven, hoeft hierbij niet vermeld te worden. Studenten die hebben aangehaald dat de afgeleide van een even functie steeds oneven is, dit 'redelijk' hebben beargumenteerd en besloten dat het daarom genoeg is om het bestaan van een van de twee punten x_0 of x_1 aan te tonen, konden nog 0.25 punten verdienen.

Opmerkingen bij de verbetering en tips:

- Indien een fout werd gemaakt in vraag (1a) of (2a), was het nog steeds mogelijk om een maximale score te behalen op de vervolgvragen, als deze correct werden opgelost gegeven het foute resultaat van (1a) of (2a).
  Een uitzondering hierop is wanneer in vraag (2a) het interval $[-1, 1]$ als domein werd gegeven — in vraag (2b) is er dan namelijk niets 'bijzonder' meer aan de eindpunten van het domein. Er geldt wel dat $y'(-1) = -y'(1)$ maar dit is triviaal, omdat de afgeleide van een even functie steeds oneven is!

- Een **belangrijke tip** is de volgende: het is altijd beter om een correcte redenering op te schrijven die niet naar de eindoplossing leidt, dan om met allerlei drogredenen te proberen de einduitkomst toch vast te knopen aan een argument dat al in het begin van het rechte pad is afgedwaald. Het eerste levert vaak gedeeltelijke punten op, terwijl het tweede geen punten waard is.
  Een voorbeeld hiervan werd al in de puntenverdeling van vraag (1d) besproken. Een ander voorbeeld is het volgende. Stel, je bent in het berekenen van de afgeleide in (2b) het minteken vergeten. Als je in vraag (2c) dan via het tekenverloop probeert te bewijzen dat y een maximum bereikt in $x = 0$, kom je uit dat de functie daar juist minimaal is. Schrijf dat dan zo op in plaats van tegen beter weten in toch een maximum te claimen voor $x = 0$.

- Voor elke rekenfout werd globaal 0.25 punten afgetrokken. Dit is zelfs zo als een correcte oplossing (zoals in 1b of 1c) nog verder werd 'vereenvoudigd' en hierin fouten zijn gemaakt. Dit klinkt streng, maar een deel van de vaardigheden die in Calculus worden aangescherpt is het 'correct en geconcentreerd berekenen van dingen'. Laat dit je echter niet weerhouden om een oplossing te vereenvoudigen want zo'n oplossing is steeds beter dan een oplossing waarin nog factoren geschrapt kunnen worden.
  Uiteraard als de opgave zelf bestond uit iets te berekenen en dit werd fout gedaan, hebben we niet tweemaal 0.25 punten afgetrokken.

- Vele studenten moeten nog leren hoe een oplossing helder op te schrijven. Dit is voor alle vakken, dus evengoed voor Calculus, van toepassing! Als de eindoplossing correct is, hebben we hiervoor geen punten afgetrokken, alleen een opmerking gemaakt. Langs de andere kant, voor een gedeeltelijke oplossing kan het van belang zijn hoe helder je je gedachten hebt geformuleerd. Het correct en helder formuleren van je redenering is een vaardigheid die in de komende jaren nog belangrijker zal worden, zowel binnen als buiten de academische wereld.

Algemene opmerkingen over het examen en veelgemaakte fouten

- Vragen (1a), (1b) en (1c) zijn voornamelijk rekenvragen. Vragen (1d) en (2d) zijn denkvragen, en bij vragen (2a), (2b) en (2c) moet zowel gerekend als geredeneerd worden. Dit weerspiegelt zich duidelijk in de behaalde punten: vragen (1a), (1b) en (1c) zijn over het algemeen zeer goed opgelost, terwijl vragen (1d) en (2d) echte hersenkrakers bleken te zijn.

- Als vervolg op de eerste opmerking, zijn een aanzienlijk aantal studenten geslaagd (de precieze aantallen moeten nog geteld worden) aangezien 2 punten reeds verdiend konden worden bij vragen (1a-c). Daartegenover staat dat slechts heel weinig studenten 4 punten of meer wisten te halen.

- Als er fouten werden gemaakt bij vragen (1a-c), zijn dit meestal de volgende: ofwel werd de productregel fout toegepast bij het impliciet afleiden van de vergelijking uit de opgave, ofwel werd in vraag (1b-c) vergeten het gegeven punt in de afgeleide y' in te vullen. Je kunt dan echter onmiddelijk zien dat de vergelijking die je bekomt, onmogelijk de vergelijking van een rechte kan zijn.

- Bij vraag (1d) werd zeer vaak de fout gemaakt dat op basis van vergelijking (2) voorbarig werd geconcludeerd dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$ (door sommige studenten), ofwel dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$ omdat de “e-macht wint” (door andere studenten). Het is belangrijk om in te zien waarom beide gevallen a priori niet uitgesloten kunnen worden! De populairste versie van deze fout is de volgende: “aangezien $y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^y}$, geldt dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \frac{0}{e^y} = 0$.” Deze uitspraak is echter zinloos in het geval dat $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$ (wat nog steeds mogelijk is) aangezien dan zelfs de ‘rekenregel’

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{e^y} = \frac{\lim_{x\to-\infty} e^{x+1}}{\lim_{x\to-\infty} e^y}$$

  niet meer geldt!

- Een essentieel ingrediënt in het bepalen van het domein van de functie in (2a) is de observatie dat, aangezien $\ln(x^2+1) \geq 0$, de ongelijkheid $e^{-1} \leq x^2+1$ steeds voldaan is. Dit werd vaak over het hoofd gezien. In het ergste geval leidde dit tot oplossingen waarin de vierkantswortel voorkwam van $\frac{1}{e} - 1$, dit is echter een negatief getal!!

- Nog bij (2a), werd zeer vaak vergeten dat $\ln(x^2+1) \geq 0$ een beperking oplegt op het bereik van de boogcosinus. In het bereik zitten namelijk enkel die hoeken in het interval $[0,\pi]$ waarvan de cosinus een positief getal is, dit leidt tot het interval $[0,\pi/2]$.

- Enkele studenten zijn onnodig punten kwijt geraakt omdat ze vergeten zijn alle onderdelen van vraag (2a) te beantwoorden.

- Bij vragen (2c) en (2d) werden typische fouten al aangehaald bij het bespreken van de verbetersleutel. Ik wil een belangrijke opmerking daar nog eens uit halen: maak nooit gebruik van een stelling zonder expliciet na te gaan (en op te schrijven) of alle voorwaarden voldaan zijn, zelfs al is dit ‘triviaal’.

- Ten slotte: als je dit eerste deelexamen slecht hebt afgerond, laat dan niet de moed zakken. Kijk waar je voornaamste fouten lagen; hier kun je veel uit leren! Als blijkt dat je enkele fundamentele technieken nog niet onder de knie hebt, is dit vaak een teken dat je de theorie en vooral de voorbeelden uit het handboek maar oppervlakkig hebt begrepen. Neem dan de tijd om deze grondig te bekijken (als voorbereiding van de colleges).
  Wees daarnaast zeker niet bang om tijdens de OASE-sessies en de oefenzittingen de monitoren of assistenten aan te spreken met vragen. Wij hebben bij wijze van spreken ‘alles al gezien’ dus hebben zeker geen oordeel over jou klaar. Integendeel, dit geeft blijk dat je echt gemotiveerd bent om de leerstof werkelijk te beheersen.