Analyse I

1 afgeleiden I

(2.5) Beschouw de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - \lambda x$. Dan weten we dat $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ en dat $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. Uit het lemma hieronder zien we dat er $c, d \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(a) > f(c)$ en $f(d) < f(b)$. We weten dat g differentieerbaar is omdat f differentieerbaar en ook dat g continu is. Omdat $[a, b]$ een gesloten interval, is $f([a, b])$ ook een gesloten interval. Uit voorgaande weten we ook dat het minimum inwendig moet zijn, stel dat dit bereikt wordt in c. Dan is $g'(c) = 0$ en dus $f'(c) = \lambda$.

Lemma 1. *Stel $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en differentieerbaar is in a. Dan bestaat er $x, y \in \mathbb{R}$ met $y < a < x$ zodat $h(y) < h(a) < h(x)$ als $h'(a) > 0$ en $h(x) < h(a) < h(y)$ als $h'(a) < 0$.*

Bewijs. We bewijzen alleen de eerste uitspraak, de tweede gaat analoog.
Stel $h'(a) > 0$. Kies $\epsilon = h'(a)$. Kies dan $\delta > 0$ zodat uit $0 < |x - a| < \delta$ dat $|\frac{h(x)-h(a)}{x-a} - h'(a)| < \epsilon$. Kies $x, y \in \mathbb{R}$ zodat $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ en $x < a < y$. Dan is $h'(a) - \epsilon < \frac{h(x)-h(a)}{x-a} < h'(a) + \epsilon$ en dus $0 < \frac{h(x)-h(a)}{x-a} < 2h'(a)$. We weten dat $x - a < 0$ en waaruit volgt dat $h(x) - h(a) < 0$ en dus $h(x) < h(a)$. Analoog volgt dat als $y - a > 0$ dat $h(a) < h(y)$. □

(2.8) Kies $\epsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ zodat uit $0 < |x| < \delta$ volgt dat $|f'(x) - 3| < \epsilon$. Kies $x \in \mathbb{R}$ zodat $0 < |x| < \delta$. Dan bestaat er een $c \in \mathbb{R}$ zodat $0 < |c| < |x|$ zodat $f(x) - f(0) = f'(c)(x)$. En dus is $|\frac{f(x)-f(0)}{x} - 3| = |f'(c) - 3| < \epsilon$. En dus is f afleidbaar in 0 en $f'(0) = 3$

(2.9) Definieer analoog voor elke $n \in \mathbb{N} : g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g_n(0) = 0$ en $g_n(x) = x^n \cos\frac{1}{x}$ als $x \neq 0$. Bewering: Voor elke $n \geq 1$ geldt het volgende:

1. De functies f_{2n} en g_{2n} zijn n keer afleidbaar. De n-de afgeleide functies $f_{2n}^{(n)}$ en $g_{2n}^{(n)}$ zijn niet continu in 0.
2. De functies f_{2n+1} en g_{2n+1} zijn n keer afleidbaar. De n-de afgeleide functies $f_{2n+1}^{(n)}$ en $g_{2n+1}^{(n)}$ zijn continu, maar niet afleidbaar in 0.

volledigeinductie:

- Basisstap: $n = 1$

  We bekijken eerst de functies f_2 en g_2. Deze is overal afleidbaar: in nul is dit door $|f_2(x)| < |x^2|$ en $|g_2(x)| < |x^2|$ en bij de rest door dat het een product is van afleidbare functies op het domein $\mathbb{R}_0$. Dit impliceert dat de $f_2^{(1)}(x) = -\cos(\frac{1}{x}) + 2x\sin(\frac{1}{x})$ en $g_2^{(1)}(x) = -\sin(\frac{1}{x}) + 2x\cos(\frac{1}{x})$ als $x \in \mathbb{R}_0$ en uit $|\frac{f_2(x)}{x}| < |x|$ en $|\frac{g_2(x)}{x}| < |x|$ volgt dat $f_2^{(1)}(0) = 0 = g_2^{(1)}(0)$. We zien dat de eerste afgeleide niet continu is in 0. Dit is in overeenstemming met het beweerde.
  Nu doen we hetzelfde voor f_3 en g_3. De afleidbaarheid volgt uit de productregel dat de identieke functie en f_2 en g_2 afleidbaar zijn. De afgeleide wordt als $x \in \mathbb{R}_0$,

$f_3^{(1)}(x) = -x\cos(\frac{1}{x}) + 3x^2\sin(\frac{1}{x})$ en $g_3^{(1)}(x) = -x\sin(\frac{1}{x}) + 3x^2\cos(\frac{1}{x})$ en we weten ook dat $f_3^{(1)}(0) = g_3^{(1)}(0) = 0$. Hierin zien we dat de eerste afgeleide continu zijn in 0. Ze zijn echter wel niet afleidbaar in 0, want $|\frac{f_3^{(1)}(x)}{x}| = |-\cos(\frac{1}{x}) + 3x\sin(\frac{1}{x})|$, waarvan we weten dat het in de buurt van 0 niet kleiner kan worden dan 1 omdat daar $sin(\frac{1}{x})$ alle waarden vertoont tussen -1 en 1 . Hetzelfde geldt voor $g_3^{(1)}$.
De basisstap klopt dus.

– Inductiestap: $n \Rightarrow n+1$

Neem dat de stelling klopt voor n. Bekijk de functies $f_{2(n+1)}$ en $g_{2(n+1)}$. Ze zijn afleidbaar als het product van de identieke functie en f_{2n} en g_{2n}, die volgens de inductiehypothese afleidbaar zijn. We zien dan dat

$$\begin{aligned} f_{2n+2}^{(1)}(x) &= -x^{2n}\cos(\tfrac{1}{x}) + (n+2)x^{n+1}\sin(\tfrac{1}{x}) \\ &= -g_{2n}(x) + (n+2)f_{2n+1}(x) \\ g_{2n+2}^{(1)}(x) &= -x^{2n}\sin(\tfrac{1}{x}) + (n+2)x^{n+1}\cos(\tfrac{1}{x}) \\ &= -f_{2n}(x) + (n+2)g_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

als $x \in \mathbb{R}_0$ en ze zijn gewoon 0 in 0. Uit de inductiehypothese weten we dat deze eerste afgeleiden n keer afleidbaar zijn en dat $f_{2(n+1)}^{(n+1)}$ en $g_{2(n+1)}^{(n+1)}$ niet continu zijn in 0.

Bekijk nu de functies $f_{2(n+1)+1}$ en $g_{2(n+1)+1}$. Ze zijn afleidbaar als het product van de identieke functie en f_{2n+1} en g_{2n+1}, die volgens de inductiehypothese afleidbaar zijn. We zien weer dat

$$\begin{aligned} f_{2n+3}^{(1)}(x) &= -x^{2n+1}\cos(\tfrac{1}{x}) + (n+3)x^{n+2}\sin(\tfrac{1}{x}) \\ &= -g_{2n+1}(x) + (n+3)f_{2n+2}(x) \\ g_{2n+3}^{(1)}(x) &= -x^{2n+1}\sin(\tfrac{1}{x}) + (n+3)x^{n+2}\cos(\tfrac{1}{x}) \\ &= -f_{2n+1}(x) + (n+3)g_{2n+2}(x) \end{aligned}$$

als $x \in \mathbb{R}_0$ en ze zijn gewoon 0 in 0. Uit de inductiehypothese weten we dat deze eerste afgeleiden n keer afleidbaar zijn en dat $f_{2(n+1)}^{(n+1)}$ en $g_{2(n+1)}^{(n+1)}$ continu zijn in 0 maar niet afleidbaar in 0.

Omdat de basisstap en inductiestap klopt, klopt de bewering.

(2.12) Kies $\epsilon > 0$. We weten dat f' continu is op $[a,b]$. Omdat $[a,b]$ compact is, is f' gelijkmatig continu. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zodat als $x, y \in [a,b]$ en $|x-y| < \delta$ volgt dat $|f'(x) - f'(y)| < \epsilon$. Kies $x, y \in \mathbb{R} : x < y$ zodat $|x-y| < \delta$. Dan bestaat er een $c \in]x,y[$ volgens de middelwaardestelling zodat $f'(c)(x-y) = f(x) - f(y)$. En dus $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)| = |f'(c) - f'(y)| < \epsilon$ omdat $|c-y| < \delta$.

(3.15) Stelling 3.9 geldt niet voor deze reeks omdat het geen machtreeks is.

2 Afgeleiden II

(3.3) Noem $S = (dg)(a)$ en kies $\epsilon > 0$. Kies $\delta_1 > 0$ zodat $\forall x \in \mathbb{R}^p : \|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < 1$ en dus $|f(x)| < |f(a)| + 1$. Kies δ_2 zodat $\forall x \in \mathbb{R}^p : 0 < \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow \frac{|g(x)-g(a)-S(x-a)|}{\|x-a\|} < \frac{\epsilon}{2(|f(a)|+1)}$. Kies tenslotte ook $\delta_3 > 0$ zodat $\forall x \in \mathbb{R}^p : \|x-a\| < \delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{\epsilon}{2(\|S\|+1)}$. Definieer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Dan geldt $\forall x \in \mathbb{R}^p : 0 < \|x-a\| < \delta$ dat :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(a)g(a) - f(a)S(x-a)| &= |f(x)(g(x)-g(a)) - f(a)S(x-a))| \\ &\leq |f(x)||g(x)-g(a)-S(x-a)| + |f(x)-f(a)||S(x-a)| \\ &< (|f(a)|+1)(\tfrac{\epsilon}{2(|f(a)|+1)})\|x-a\| + \tfrac{\epsilon}{2(\|S\|+1)}\|S\|\|x-a\| \\ &\leq \epsilon\|x-a\| \end{aligned}$$

En dus is $\frac{|f(x)g(x)-f(a)g(a)-f(a)S(x-a)|}{\|x-a\|} < \frac{\epsilon\|x-a\|}{\|x-a\|} = \epsilon$. Hieruit volgt dat fg overal totaal afleidbaar is en dat $(d(fg))(a) = f(a)(dg)(a)$.

(3.8) Hier staat een fout in de opgave! Men kan dit oplossen op 2 manieren: ofwel eist men dat voor alle $x \in \mathbb{R}^2 : (D_1D_1f)(x) > 0$ of dat $x \in \mathbb{R}^2 : (D_2D_2f)(x) \geq 0$.
Definieer $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a_1 + th, a_2 + tk)$ met $h = x_1 - a_1$ en $k = x_2 - a_2$. Definieer $F = f\circ\gamma$. Dan is $F(0) = f(a)$ en $F(1) = f(x)$. F is ook twee keer afleidbaar als samenstelling van functies die 2 keer afleidbaar zijn. Daarom kunnen we de stelling van Taylor gebruiken die geeft dat er een $c \in [0, 1]]$ zodat $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(c)}{2}$.
We moeten dus op zoek naar de eerste en tweede afgeleide van F. Dan is voor $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F'(t) &= (dF)(t)(1) \\ &= (df \circ \gamma)(t)(1) \\ &= (df)(\gamma(t))[(d\gamma)(t)(1)] \\ &= (df)(\gamma(t)[(h, k)] \\ &= h(D_1f)(\gamma(t)) + k(D_2f)(\gamma(t)) \end{aligned}$$

We weten ook dat D_1f en D_2f continu afleidbaar zijn. Analoog volgt dan dat voor $c \in [0, 1]$:

$$F''(c) = h^2(D_1D_1f)(\gamma(c)) + 2hk(D_1D_2f)(\gamma(c)) + k^2(D_2D_2f)(\gamma(c))$$

Nu weten we ook dat $\gamma(c)$ in $\mathbb{R}^2$ ligt, en dus dat de voorwaarden gelden. Noem $b = \gamma(c)$.
Als we eisen dat $(D_1D_1f)(b) > 0$. We weten ook dat $(hD_1D_1f(b) + kD_1D_2f(b))^2 \geq 0$ en dus dat $h^2D_1D_1f(b)^2 + 2hkD_1D_1f(b)D_1D_2f(b) + k^2D_1D_2f(b)^2 \geq 0$. Hieruit volgt dan dat $h^2D_1D_1f(b) + 2hkD_1D_2f(b) + k^2\frac{D_1D_2f(b)^2}{D_1D_1f(b)} \geq 0$. Uit de tweede voorwaarde volgt dan als $D_1D_1f(b) > 0$ dat $\frac{D_1D_2f(b)^2}{D_1D_1f(b)} \leq D_2D_2f(b)$. En dus is $h^2D_1D_1f(b) + 2hkD_1D_2f(b) + k^2D_2D_2f(b) \geq h^2D_1D_1f(b) + 2hkD_1D_2f(b) + k^2\frac{D_1D_2f(b)^2}{D_1D_1f(b)} \geq 0$. De tweede afgeleide is dus groter dan nul.
Anderzijds stel $(D_1D_1f)(b) = 0$. Dan moeten we eisen dat $(D_2D_2f)(b) > 0$. Uit de tweede voorwaarde volgt dan $(D_1D_2f)(b) = 0$.
We hebben nu dus dat $F''(c) > 0$ en dus volgt hieruit dat $F(1) \geq F(0) + F'(0) = F(0) + (df)(\gamma(0))[(h, k)]$. Als we alles terug omzetten in termen van a, x en f wordt dit: $f(x) \geq f(a) + (df)(a)(x - a)$, wat het gevraagde is.
Aanpassingen:

a) Als we $(D_2D_2f)(x) > 0$ eisen, verloopt het bewijs analoog. (Als $(D_2D_2f)(x) \geq 0$ moeten we ook eisen dat $(D_1D_1f)(x) \geq 0$

b) & c) We kunnen iets gelijkaardig bewijzen als we eisen dat $(D_2D_2f)(x) < 0$, $(D_1D_1f)(x) < 0$ of $(D_2D_2f)(x) \leq 0$ $(D_1D_1f)(x) \leq 0$.

$$f(x) \leq f(a) + df(a)(x - a)$$

(4.5) Noem $T = (df)(a)$ en $S = (d(f^{-1}))(f(a))$. Nu weten we ook dat $f\circ f^{-1}$ ook totaal afleidbaar is in a omdat f en f^{-1} totaal afleidbaar zijn in de nodige punten en is $d(f \circ f^{-1})(a) = T \circ S$. Kies $\epsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ zodat $\frac{\|f\circ f^{-1}(x)-f\circ f^{-1}(a)-S\circ T(x-a)\|}{\|x-a\|} < \epsilon$. Nu weten we dat $f \circ f^{-1}(x) - f \circ f^{-1}(a) = x - a$ en dus is $\frac{\|x-a-S\circ T(x-a)\|}{\|x-a\|} < \epsilon$. Kies $j \in \{1, \ldots, n\}$. Neem $t \in \mathbb{R}$ zodat $0 < t < \delta$. Dan weten we dat als we $x = a + te_j$ nemen, dat $\|e_j - S \circ T(e_j)\| = \frac{\|a+te_j-a-S\circ T(a+te_j-a)\|}{\|a+te_j-a\|} < \epsilon$. Omdat dit geldt voor alle $\epsilon > 0$, volgt hieruit dat $S\circ T(e_j) = e_j$. Dit geldt ook voor alle j en dus zien we dat $S \circ T = I_n$.
Analoog bewijzen we dat $T \circ S = I_n$ en dus is S de inverse van T. Hieruit volgt dus dat $T = (df)(a)$ inverteerbaar is.

(4.7) $\mathbb{R}^3$ is duidelijk open. De functie f is continu differentieerbaar omdat ze een samenstelling is van continu differentieerbare functies. Noem $a = 0 \in \mathbb{R}$ en $b = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ en dan is $f(a, b) = 0$. $(D_1 f)(a, b) = 2ab_1 + e^a = 1$ en dus is $(df)(a, b)$ tot $\mathbb{R}$injectief. Hieruit volgt dan wat we moeten hebben.
Uit de cursus halen we dat $(dg)(a) = -T_1^{-1} \circ T_2$ en dus moeten we T_1 en T_2 bepalen. Om deze twee te bepalen, is het genoeg dat we T hebben. Uit sectie 3 verkijgen we dat $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto (D_1 f)(a, b)x + (D_2 f)(a, b)y + (D_2 f)(a, b)z = x + z$. Hieruit volgt dat $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ en $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (y, z) \mapsto z$. Hieruit volgt dan dat $(D_1 g)(1, -1) = (dg)(1, -1)(1, 0) = 0$ en $(D_2 g)(1, -1) = (dg)(1, -1)(0, 1) = 1$.

(4.9) Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$. Als $D_2 f(x, y) \neq 0$, dan is $(df)(x, y)$ injectief en volgt uit de impliciete functiestelling dat we een functie $g : U \to \mathbb{R}$ kunnen vinden zodat $f(x, g(x)) = 0$. Hieruit volgt dat de punten die wij zoeken al zeker $D_2 f(x, y) = 0$. We krijgen dan het volgende stelsel:

$$\begin{cases} y(x^2 + y^2) + a^2 y &= 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= 0 \end{cases}$$

Stel $y = 0$, dan moet $x^4 = 2a^2x^2$ en dus zijn de volgende koppels al oplossingen: $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}a, 0)$ en $(\sqrt{2}a, 0)$. Anderzijds, stel $y \neq 0$, dan moet $x^2 + y^2 = -a^2$, wat niet kan omdat $a > 0$.
De oplossingen zijn dus $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}a, 0)$ en $(\sqrt{2}a, 0)$.

Analoog moet $D_1 f(x, y) = 0$ opdat we x niet zouden kunnen uitdrukken in functie van y. Dit geeft het volgende stelsel:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - a^2 x &= 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= 0 \end{cases}$$

Stel $x = 0$, dan moet $y^4 + 2a^2y^2 = 0$ en dus dat $y = 0$. Hier vinden we dus weer het koppel $(0, 0)$.
Anderzijds stel $x \neq 0$, dan moet $x^2 + y^2 = a^2$. Hieruit volgt dat $y^2 = \frac{a^2}{4}$ en dus dat $x^2 = \frac{3a^2}{4}$. Hierin vinden we de volgende oplossingen: $(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2})$ en $(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2})$.
<u>Hint:</u> Onze rekenmachines kunnen met polaire coördinaten werken.

(5.1) a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$$

f' is dan:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x) = 4x^3 - 4ax$$

Opdat $x \in \mathbb{R}$ een kritisch punt is, moet $f'(x) = 0$. Dus moet $4x^3 - 4ax = 0$ of $x = 0 \vee x^2 = a$. Stel eerst dat $a > 0$. Dan hebben we 3 verschillende nulpunten, namelijk $-\sqrt{a}, 0, \sqrt{a}$. We gaan stelling 5.2 gebruiken om ze te classificeren. Eerst moeten we nog de tweede afgeleide berekenen:

$$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f''(x) = 12x^2 - 4a$$

Als $x = 0$, dan is $f'(x) = 0$ en $f''(x) = -4a < 0$ en dus is 0 een lokaal maximum. Bij $x = -\sqrt{a}$, is $f''(x) = 8a$ en dus is $-\sqrt{a}$ een lokaal minimum. Analoog volgt dat $\sqrt{a}$ een lokaal minimum is.
Als $a = 0$, dan is 0 een drievoudige oplossing voor $f'(x)$. Na een kleine berekening zien we dat $0 = f'(0) = f''(0) = f'''(0)$ en $f''''(0) = 24 > 0$. Hieruit volgt dan 0 een lokaal minimum is.
Als $a < 0$, dan heeft $f'(x) = 0$ 1 oplossing, namelijk $x = 0$. $f''(0)$ is dan $= -4a > 0$ en dus is 0 een lokaal minimum.

b)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 - 3axy + y^3$$

We merken op dat f totaal afleidbaar is als de samenstelling en quotiënt van totaal afleidbare functies. We berekenen dan eerst de partiële afgeleiden:

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) &= 3x^2 - 3ay \\ D_2 f(x,y) &= 3y^2 - 3ax \end{cases}$$

We eisen nu dat de $\nabla f(x)$ (de) nul(vector) is[1]. Dan moet dus $D_1 f(x,y) = 0 = D_2 f(x,y)$. Hieruit volgt dan $x^2 = ay$ en $y^2 = ax$. Stel $a = 0$, dan moet $x = y = 0$ en dus is $(0,0)$ een kritiek punt. Anderzijds stel $a \neq 0$, dan is $x^4 = a^2 y^2 = a^3 x$. Nu moet $x = 0 \vee x = a$. Hieruit weten we dan dat $(x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = a \wedge y = a)$ moet voldaan zijn.
Om deze punten nu te classificeren, moeten we de 2 de orde afgeleiden kennen:

$$\begin{cases} D_1 D_1 f(x,y) &= 6x \\ D_2 D_1 f(x,y) &= -3a \\ D_2 D_2 f(x,y) &= 6y \end{cases}$$

Stel weer $a = 0$. Dan is $(0,0)$ het kritieke punt en $\triangle(0,0)$ uit stelling 5.9 is dan $= (D_1 D_1 f)(0,0)(D_2 D_2 f)(0,0) - ((D_1 D_2 f)(0,0))^2 = 0 - 9a^2 = 0$. Stelling 5.9 zegt ons dan niets over het al dan niet een extremum te hebben in $(0,0)$. Definieer dan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,0) = x^3$. Hieruit blijkt duidelijk dat g een buigpunt rond 0 heeft. Hieruit volgt dat f in $(0,0)$ een zadelpunt heeft.
Anderzijds als $a \neq 0$, dan zijn $(0,0)$ en (a,a) de kritieke punten. $\triangle(0,0)$ is dan $= -9a^2 < 0$. Uit stelling 5.9 mogen we dan besluiten dat $(0,0)$ een zadelpunt is.
$\triangle(a,a)$ is daarentegen gelijk aan $6a \cdot 6a - 9a^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$. Als $a < 0$, dan is $D_1 D_1 f(a,a) = 6a < 0$ en dus is (a,a) een lokaal maximum. Tenslotte als $a > 0$, dan is $D_1 D_1 f(a,a) = 6a > 0$ en dus bereikt f daar een lokaal minimum.

(5.2) a) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy^2$. Deze is overal continu totaal afleidbaar als product van 2 continu totaal afleidbare functies. $D_1 f(0,0)$ en $D_2 f(0,0)$ zijn beiden 0 en dus is (0,0) een kritiek punt. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Dan zijn $(\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4})$ en $(-\frac{\delta}{4}, -\frac{\delta}{4})$ elementen van $B((0,0),\delta)$. Nu is het zo dat $f(\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}) < f(0,0) < f(-\frac{\delta}{4}, -\frac{\delta}{4})$, want $-\frac{\delta^3}{64} < 0 < \frac{\delta^3}{64}$. En dus hebben we punten in de buurt van $(0,0)$ die zowel groter als kleiner zijn dan de functiewaarde daar. Omdat δ willekeurig gekozen is, is $(0,0)$ een zadelpunt.
<u>Stelling 5.7:</u> Niet bruikbaar aangezien de tweede orde afgeleiden allemaal nul zijn.
<u>Stelling 5.9:</u> Niet bruikbaar aangezien er geen uitspraak is omdat $\triangle(0,0) = 0$.

b) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Deze is overal continu totaal afleidbaar als het verschil van 2 continu totaal afleidbare functies. $D_1 f(0,0)$ en $D_2 f(0,0)$ zijn weer beiden 0 en dus is (0,0) een kritiek punt. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Dan zijn $(\frac{\delta}{2}, 0)$ en $(0, \frac{\delta}{2})$ 2 elementen van $B((0,0),\delta)$. Nu blijkt dat $f(0, \frac{\delta}{2}) < f(0,0) < f(\frac{\delta}{2}, 0)$. Omdat δ willekeurig is gekozen, is $(0,0)$ een zadelpunt.
<u>Stelling 5.7:</u> Voorwaarden zijn voldaan. De eigenwaarden van de matrix Q zijn -2 en 2. Er is zowel een strikt positieve als een strikt negatieve eigenwaarde en dus is (0,0) een zadelpunt.
<u>Stelling 5.9:</u> Voorwaarden zijn ook voldaan. $\triangle(0,0) = -4 < 0$ en dus is $(0,0)$ een zadelpunt.

c) Beschouw $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x - y^2)(x - 2y^2)$. Deze is overal continu totaal afleidbaar als product van 2 continu totaal afleidbare functies. Kies $1 > \delta > 0$ willekeurig.

[1] Dit is hetzelfde als eisen dat $(df)(x,y) = 0$.

Weer zijn $(\frac{\delta}{2}, 0)$ en $(\frac{\delta}{4}, \frac{3\delta^2}{32})$ elementen van $B((0,0),\delta)$ en $f(\frac{\delta}{4}, \frac{3\delta^2}{32}) = \frac{-\delta^4}{32^2} < f(0,0) = 0 < \frac{\delta^4}{8} = f(\frac{\delta}{2}, 0)$. Omdat δ willekeurig gekozen was, is $(0,0)$ een zadelpunt.
We berekenen eerst de eerste orde en tweede orde afgeleiden om dan naar de 2 stellingen te kijken.

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) &= 12x^3 - 6xy \\ D_2 f(x,y) &= 2y - 3x^2 \\ D_1 D_1 f(x,y) &= 36x^2 - 6y \\ D_2 D_1 f(x,y) &= -6x \\ D_2 D_2 f(x,y) &= 2 \end{cases}$$

<u>Stelling 5.7:</u> Niet bruikbaar aangezien de eigenwaarden van Q 0 en 2 zijn en dus is er geen uitspraak.
<u>Stelling 5.9:</u> Niet bruikbaar aangezien er geen uitspraak is omdat $\triangle(0,0) = 0$.

(5.3) In de les gemaakt.

(5.4) Beschouw $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 1 + x^2 - y^2 - z$ en $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Dan moeten we het minimum van $h(x) : x \in \mathbb{R}^3$ onder de voorwaarde dat $g(x) = 0$. We weten dat h en g continu differentieerbaar zijn. Nu moeten we oplossingen zoeken van het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{cases}$$

Dit valt te herschrijven als:

$$\begin{cases} 2x &= \lambda 2x \\ 2y &= -\lambda 2y \\ 2z &= -\lambda \\ x^2 - y^2 + 1 &= z \end{cases}$$

Stel eerst dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$. Dan moet $1 = \lambda = -1$ wat een contradictie geeft.
Als $x = 0$ en $y = 0$, dan moet $z = 1$ en $\lambda = -2$. En dus $(0,0,1)$ een mogelijkheid.
Anderzijds als $x = 0$ en $y \neq 0$. Dan moet $\lambda = -1$ en dus $z = \frac{1}{2}$. Hier volgt uit dat $y^2 = \frac{1}{2}$. Hieruit komen 2 mogelijkheden, namelijk: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ en $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.
Stel als laatste $x \neq 0$ en $y = 0$. Dan moet $\lambda = 1$ en $z = -\frac{1}{2}$. Hieruit volgt dat $x^2 = -\frac{1}{2} - 1$. Dit Dit heeft duidelijk geen oplossingen en dus komen er hier geen mogelijkheden uit voort.
Nu weten we dat $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ en $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ de minima zijn, zij de kleinste waarden voor g krijgen, van de mogelijkheden.
We definieren $e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + f(x,y)^2$. We trachten hiervan de kritieke punten te zoeken. Dan moet weer $\nabla e(x,y) = 0$. Dit komt neer op de oplossingen van het volgende stelsel:

$$\begin{cases} D_1 e(x,y) &= 2x + 2x(x^2 - y^2 + 1) = 0 \\ D_2 e(x,y &= 2y - 2y(x^2 - y^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Dit kunnen we nog herschrijven tot:

$$\begin{cases} x(x^2 - y^2 + 2) &= 0 \\ y(x^2 - y^2) &= 0 \end{cases}$$

Stel eerst dat $x = 0$. Dan volgt uit de tweede vergelijking dat $y = 0$. Anderzijds, stel $x \neq 0$, dan volgt uit de eerste vergelijking $y^2 = \frac{1}{2}$. We hebben dezelfde kritieke punten. We berekenen eerst de tweede orde afgeleiden:

$$\begin{cases} D_1 D_1 e(x,y) &= 2(x^2 - y^2 + 2) + 2x \cdot 2x \\ D_1 D_2 e(x,y) &= -4xy \\ D_2 D_2 e(x,y) &= -2(x^2 - y^2) + 2y \cdot 2y \end{cases}$$

Als we eerst $(0,0)$ beschouwen, dan zien we dat $\triangle(0,0) = 0$ en dus kunnen we geen uitspraak doen. De eigenwaarden van de bijbehorende Q-matrix zijn 0 en 2 en dus kunnen we weer geen uitspraak doen. Echter als we $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e(0,x) = x^2 + (1-x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1$. i bereikt in 0 een maximum en dus kan het geen minimum zijn, zoals we zochten.
Bij $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ is $\triangle(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ en dus hebben we weer geen uitspraak.
Om te besluiten dat dit wel degelijk de minima zijn die we zoeken, merken we op dat e altijd positief is, en dus naar beneden begrensd. Op de compacte verzameling $B((0,0),4)$ moet het minimum en maximum bereikt worden. De randpunten van deze zijn allemaal groten dan $\frac{3}{4}$ en dus moet het minimum inwendig zijn. Hier moet de totale afgeleide nul zijn, wat in deze punten het geval is.

(5.5) Definieer $f : {\mathbb{R}^+}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xyz$ en $g : {\mathbb{R}^+}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Nu weten we dat $f(w)$ het volume geeft van de balk, met als hoekpunten de oorsprong en het punt w. Onder de aanname dat de zijden van de gezochte balk evenwijdig moeten zijn met de assen, moeten we de functie f maximaliseren en dan krijgen we een w. De gezochte balk is dan diegene waar w en $-w$, want met elke balk die aan de beginvoorwaarden voldoen, kan gemodelleerd worden als één hoekpunt in de positieve delen van de assen. Het uiteindelijke volume is dan $8f(x)$. Nu moeten we het maximum van $f(w) : w \in {\mathbb{R}^+}^3$ met de voorwaarde dat $g(w) = 1$. We moeten dus oplossingen van het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \nabla f(w) - \lambda \nabla g(w) &= 0 \\ g(w) &= 1 \end{cases}$$

Wat herleid kan worden tot:

$$\begin{cases} yz - \lambda\frac{2x}{a^2} &= 0 \\ xz - \lambda\frac{2y}{b^2} &= 0 \\ xy - \lambda\frac{2z}{c^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{cases}$$

Aangezien we een maximum moeten hebben van f, moet $x,y,z > 0$. Uit de tweede vergelijking weten we dat $x = \lambda\frac{2y}{b^2 z}$. Als we dit invullen in de eerste vergelijking, zien we dat $yz - \lambda^2\frac{4y}{b^2a^2z}$. En dus dat $z^2 = (\frac{2\lambda}{ab})^2$. Analoog vinden we dat $y^2 = \frac{4\lambda^2}{a^2c^2}$ en $x^2 = \frac{4\lambda^2}{b^2c^2}$. Hierdoor kunnen we dit alles invullen in de laatste vergelijking:

$$\frac{4\lambda^2}{a^2b^2c^2} + \frac{4\lambda^2}{a^2b^2b^2} + \frac{4\lambda^2}{a^2b^2c^2} = 1$$

En dus moet $\lambda^2 = \frac{a^2b^2c^2}{12}$. We weten ook dat $\lambda > 0$ moet zijn uit dat de rest ook strikt positief moet zijn, en dus is $\lambda = \frac{abc}{2\sqrt{3}}$. Hieruit volgt dat:

$$\begin{cases} x &= \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z &= \frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $f(x) = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$ en dus is het maximale volume $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

(5.6) Definieer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$, $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ en $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 3x + y - 5$.
We merken op dat dg_1 altijd surjectief is in $\mathbb{R}^3$ behalve in de oorsprong en dg_2 overal surjectief is. De oorspong echter interesseert ons niet omdat dit geen punt is van de kromme.
Volgens stelling 5.10 moeten de extrema, hier (x,y,z), van f voldoen aan de voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 2x - \lambda 2x - 3\mu &= 0 \\ 2y - \lambda 2y - \mu &= 0 \\ 2z + \lambda 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ 3x + y - 5 &= 0 \end{cases}$$

Stel $z = 0$, dan moet $x^2 + y^2 = 0$ en dus moet $x = 0$ en $y = 0$. Dit punt is dus de oorsprong, wat niet kan wegens de laatste vergelijking. $z \neq 0$ moet dus gelden.
Hieruit weten we dat $\lambda = -1$. Hieruit volgt dat $4x = 3\mu$ en $4y = \mu$. Hieruit volgt dat $x = 3y$ en dus dat $10y = 5$. Hieruit volgt dat $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $\mu = 2$ en $z = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.
We weten ook dat f op $\mathbb{R}^3$ een globaal minimum moet hebben omdat $\forall w \in \mathbb{R}^3 : f(w) \leq 0$. We hebben juist twee mogelijke kandidaten gevonden. Nu is het zo dat $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{5}{2}}) = 5$ en dus zijn ze beiden een minimum.

(5.7) Definieer $\gamma = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (-t^2, t^4)$. Dan weten we dat $g = f \circ \gamma$. Uit de opgave weten we dat f 2 keer totaal afleidbaar is en het is niet moeilijk om in te zien dat γ ook 2 keer totaal afleidbaar is.
dan is $g'(t) = (dg)(t)(1) = (df \circ \gamma)(t)(1) = (df)(-t^2, t^4)\,[(d\gamma)(t)(1)] = (df)(-t^2, t^4)\,\left[(-2t, 4t^3)\right] = (D_1 f)(-t^2, t^4)(-2t) + (D_2 f)(-t^2, t^4)4t^3$.
Hieruit weten we dat 0 een kritiek punt is om dat $g'(0) = 0$. De tweede afgeleide is iets moeilijker te vinden. We merken eerst op dat de eerste afgeleide bestaat uit het product van partiele afgeleiden van f en veeltermen. We moeten ook alleen maar de tweede afgeleide hebben in het punt 0. Om van dit product de afgeleide te vinden, moeten we de productregel toepassen: van de tweede term hebben we geen 'last' aangezien de term x^3 in 0, 0 als functiewaarde heeft en ook 0 als afgeleide. Bij de $-2t$ merken we op dat dit in 0 ook 0 geeft, maar de afgeleide is -2.
Hieruit volgt dat $g''(0) = -2 \cdot (D_1 f)(0, 0) = -2$, en dus dat g een lokaal maximum heeft in 0.

(5.8) Een bol is een vorm van een ellipsode met $a = b = c = 1$, hieruit volgt dat het maximale volume: $\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$.

(5.9) We zoeken eerst of $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \overline{f}(x, y) = x^2 - x + y^2 - 2y$. Dit is een continue en totaal afleidbare uitbreiding van f naar heel $\mathbb{R}^2$. De maxima en minima zijn kritieke punten. Hiervoor moet $(d\overline{f})(x, y) = 0$ en dus $2x - 1 \wedge 2y - 2 = 0$. Het punt $(\frac{1}{2}, 1)$ is dan een kritiek punt. We merken dan op dat voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \overline{f}(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 - \frac{5}{4}$ waaruit blijkt dat ons gevonden punt een globaal minimum is. We merken echter wel op dat $(\frac{1}{2}, 1) \notin \overline{B}((0, 0), 1)$. Hieruit blijkt dat als we $\overline{f}$ bekijken, we geen kritieke punten hebben. Omdat f in het inwendige van zijn domein totaal afleidbaar, moeten de extrema liggen op de rand, d.w.z. in $\overline{B}((0, 0), 1) \backslash (\overline{B}((0, 0), 1))^\circ$.
We definieren $g : \overline{B}((0, 0), 1) \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Nu merken op dat voor $\forall w \in \overline{B}((0, 0), 1)$ dat $g(w) = 0 \Leftrightarrow w \notin (\overline{B}((0, 0), 1))^\circ$. We moeten nu de extrema van $\forall w \in \overline{B}((0, 0), 1) : f(w)$ vinden onder de voorwaarde dat $g(w) = 0$. We merken op dat zowel f en g continu differentieerbaar zijn. $\nabla g(w) \neq 0$ als $g(w) = 0$, want als $w = (x, y)$, dan mogen x en y niet beiden nul zijn, want dan is $g(w) \neq 0$. Als echter we eisen dat $\nabla g(w) = 0$, dan volgt dat x en y beiden nul moeten zijn wat een tegenspraak levert en dus het vooropgestelde juist is.
Nu zijn de extrema volgens Stelling 5.10 oplossingen van het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 2x - 1 &= \lambda 2x \\ 2y - 2 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \end{cases}$$

Dan is $(1 - \lambda)x = \frac{1}{2}$ en $(1 - \lambda)y = 1$ en dus $(\lambda - 1)^2 = (x^2 + y^2)(\lambda - 1)^2 = (\frac{1}{2})^2 + 1^2$. En dus $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. De extrema-kandidaten zijn dus $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ en $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. Omdat we een minimum en een maximum moeten hebben, zijn dit de extrema. Door hun functiewaarde te gaan berekenen, zien we dat $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ het minimum is en dat $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$ het maximum is.

3 Integratietheorie

(1.7) Definieer $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en dan convergeert s_n naar $\ln 2$.

4 Speciale functies

(4.6) We bewijzen dit met behulp van volledige inductie:

- basisstap: $n = 0$

  We weten reeds dat $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$.

- inductiestap: $n \Rightarrow n + 1$:

  We nemen aan dat het voor n geldt, we tonen het nu aan voor $n + 1$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma((n+1)\frac{1}{2}) & = & \Gamma(n + \frac{3}{2}) \\ & = & (n + \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2} \\ & = & (n + \frac{1}{2})\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \\ & = & \frac{2^2(n+\frac{1}{2})(n+1)(2n)!}{(n+1)2^2 2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \\ & = & \frac{(2n+1)(2n+2)(2n)!}{(n+1)2^{2(n+1)n}n!}\sqrt{\pi} \\ & = & \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)n}(n+1)!}\sqrt{\pi} \end{array}$$