

Bespreking Examen Analyse 1 (Juni 2006)

Vooraf: De aanleiding om deze tekst te maken en te verspreiden zijn een aantal uitspraken op het Wina forum over het examen analyse. Maar vooral wil ik met deze tekst wat feedback geven op het examen. Ik heb zulke teksten ook al vroeger gemaakt, maar dan na een proefexamen. Het is de eerste keer dat ik het doe na een examen in juni.

Ik maak deze tekst voor de studenten beschikbaar, op het einde van de examenperiode, maar voor de deliberatie.

De vragen vind je achteraan.

Vraag 1. Dit was een gemakkelijke vraag. Het is een vraag die ik vorig jaar op het examen gesteld heb. Het is een vraag die ik in de les op het proefexamen behandeld heb. En de oefening werd zeker in sommige oefeningenzittingen ook bekeken. Een echt 'cadeautje' dus. De vraag werd dan ook, over het algemeen goed beantwoord (en op verschillende manieren).

Toch waren er nog enkele studenten met een volledig foutief antwoord. Bovendien zijn er ook nogal wat studenten die vergeten zijn (veronderstel ik?) om het resultaat met voorbeelden te illustreren. Dat was nochtans uitdrukkelijk gevraagd. En er zijn bijna geen studenten die enige creativiteit aan de dag leggen bij het kiezen van deze voorbeelden. Dat was in feite de manier waarop je je met deze vraag kon onderscheiden. Je kon hiermee bijvoorbeeld aantonen dat je de begrippen 'inwendige' en 'sluiting' goed beheerste. Je had ook je kennis van metrische ruimten kunnen illustreren door voorbeelden te geven in minder voor de hand liggende metrische ruimten.

Vraag 2. Ook dit was een vraag van vroeger (zie de examenvragen die ik op het proefexamen heb uitgedeeld). Hierop kon je je dus perfect voorbereiden.

Voor veel studenten is het zeker niet zo duidelijk hoe je hierop nu goed moet antwoorden. Wat je zeker moest doen is (1) zeggen dat gelijkmatige continuïteit de gewone continuïteit impliceert, (2) dat het omgekeerde niet waar is (3) maar wel als je op compacte verzamelingen werkt. Bovendien moest je natuurlijk voorbeelden geven om je beweringen te illustreren. Voor de hand liggende voorbeelden zijn $x \mapsto x^2$ op $\mathbb{R}$ of $x \mapsto \frac{1}{x}$ op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daarbij kon je wat uitleg geven (steilheid van de grafiek, het niet begrensd zijn van het domein, het niet open zijn van het domein, ...). Op die manier kom je dan bij andere gevallen, waarbij het niet gelijkmatig continu zijn niets te maken heeft met de steilheid van de grafiek (zoals bijvoorbeeld bij de functie uit Voorbeeld 1.16.iii - deeltje 'Continuïteit van reële en complexe functies'), of van functies die wel gelijkmatig continu zijn maar toch een steile grafiek vertonen (zoals $x \mapsto \sqrt{x}$ op $\mathbb{R}^+$).

Nu zijn er bijvoorbeeld heel wat studenten die dit laatste voorbeeld geven, maar dan gewoon als een voorbeeld van een functie die gelijkmatig continu is. Dat heeft natuurlijk niet veel zin als je daar niet bij vertelt wat dan verder zo speciaal is aan dit voorbeeld. Het is immers niet moeilijk om voorbeelden te geven van functies die gelijkmatig continu zijn!

En waarom ook hier weer eens niet zoeken naar een illustrerend voorbeeld, verschillend van degene die we in de les behandeld hebben? Ook op die manier kon je hier laten blijken dat je inzicht had.

Ook nogal wat studenten vermelden dat het ene een 'lokaal begrip' is terwijl het andere een 'globaal begrip' is. Dat is juist, maar het moet wel uitgelegd worden.

Op deze vraag halen 16/48 studenten een voldoende. Ik heb deze vraag redelijk streng beoordeeld om de eenvoudige reden dat dit een vraag was van vroeger waarover iedereen kon beschikken (via de teksten uitgedeeld op het proefexamen in de les).

Vraag 3. Deze vraag was een lichte variant op wat in de cursus staat (Afgeleiden I, Voorbeeld 2.7.iv) en wat in de les besproken werd. De overgrote meerderheid van de studenten geeft 0 geen aparte behandeling terwijl het natuurlijk daarover ging. Er zijn nog altijd studenten die bijvoorbeeld $\exp(x)' = \exp(x)$ schrijven alhoewel ik heel uitdrukkelijk in de les heb gezegd dat zoiets fout is. Een student schreef zelfs $(0)' = 0$ wat natuurlijk helemaal onzin is.

Verder zijn er niet veel studenten die commentaar geven en er zijn slechts een paar studenten die verstandige commentaar geven (omtrekt het gedrag van deze functie in de buurt van 0 - want daar was het om te doen).

Op deze vraag halen slechts 9 studenten voldoende, vooral dan omdat blijkbaar slechts weinig studenten de essentie (namelijk het problematisch gedrag in 0) begrepen hebben.

Vraag 4. Het goede antwoord verwijst duidelijk naar Propositie 1.4 uit 'Afgeleiden II'. Immers, na het bewijs staat (op pagina 5): 'Deze vorm van de kettingregel wordt meestal geschreven met een formule als ... waarbij we dan x_j als functie van t bekijken. Dit alles moest je dan wat verder uitleggen. Je kon blijk geven van dieper inzicht door bijvoorbeeld uit te leggen waarom deze formule minder correct is dan de formule in de propositie. Zo gebruik je bijvoorbeeld het symbool x_j in twee verschillende betekenissen. Bij de partiële afgeleide gaat het over de j -de veranderlijke van de functie f terwijl daarna de x_j een functie voorstelt van een veranderlijke t . Een andere manier om te tonen dat je dit goed begreep was een voorbeeld geven. Vele studenten hebben inderdaad een voorbeeld gegeven maar, spijtig genoeg, waren deze voorbeelden dikwijls fout en werd daarmee aangetoond dat de student de formule toch niet zo goed begreep.

Uiteindelijk zijn er verscheidene studenten die eerst verwijzen naar de formule zoals die staat na Stelling 3.3 op pagina 15. Dit is iets anders. Als je formeel deelt door dt bekom je wel dezelfde formule, maar dat mag natuurlijk niet.

Op deze vraag behalen 26 studenten voldoende alhoewel er niet zo heel veel zijn die het toch echt goed doen en de essentie van het probleem lijken te begrijpen.

Vraag 5. Hier waren verschillende goede antwoorden mogelijk. Zo kon je bijvoorbeeld $z = x^2 - y^2 + 1$ invullen in $x^2 + y^2 + z^2$ en dan het minimum zoeken van de functie $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + (x^2 - y^2 + 1)^2$ op $\mathbb{R}^2$. Een andere mogelijkheid was Stelling 5.10 (uit 'Afgeleiden II' gebruiken). Op die manier werd het probleem behandeld in de les van 17 mei.

De structuur van de goede oplossing ligt dan voor de hand. Eerst merk je op dat je Stelling 5.10 gaat gebruiken. Dan geef je aan wat de ingrediënten in de stelling in het geval van de toepassing worden ($n = 3$, $A = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $p = 1$ en $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + 1 - z$). Dan moet je de voorwaarden nagaan (f en g continu differentieerbaar). Dan moet je nagaan welke voorwaarde je op (a, b, c) krijgt door te stellen dat $(dg)(a, b, c)$ surjectief is. Dan (pas) schrijf je het stelsel van vergelijkingen op met dus één parameter λ . Dan los je dit stelsel systematisch op (door ook rekening te houden met de voorwaarde dat $g(a, b, c) = 0$). Je komt dan bij 3 oplossingen (nl. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ en $(0, 0, 1)$). De afstand van deze punten tot de oorsprong is $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ voor de eerste twee en 1 voor het derde punt. Het derde punt mag (en moet) je dus uitsluiten. Dan moet je nog een argument geven waarom de twee overblijvende punten wel degelijk een minimum opleveren. En uiteindelijk kon je dan nog een drie-dimensionale tekening maken met vooral aandacht voor het $y - z$ -vlak waarin zich het essentiële afspeelt.

In de meeste gevallen bestaan de antwoorden uit berekeningen. Zeer weinig studenten argumenteren bijvoorbeeld dat de voorwaarden voldaan zijn en leggen uit wat het surjectief zijn van $(dg)(a, b, c)$ precies impliceert. Nochtans is het evident dat je, bij het toepassen van een stelling, gaat nakijken of de voorwaarden voldaan zijn! Dan zijn er nog vele studenten die niet alle oplossingen van het stelsel vinden (of niet op de goede manier). En de meeste studenten vergeten het punt $(0, 0, 1)$ uit te sluiten.

Er zijn 18 studenten die voldoende halen, maar slechts een paar studenten geven echt een goed antwoord. En bijna niemand geeft dit antwoord volledig nauwkeurig, samen met een goede geometrische interpretatie. Nochtans ... dit was gedaan in de les! En het examen is openboek!

Vraag 6. Het antwoord op deze vraag was heel eenvoudig. Omdat $|\sin(nx)| \leq 1$ voor elke x en elke n en omdat $x^2 + n^2 \geq n^2$ zal $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ en bijgevolg zal

$$\left| \int_0^{2\pi} f_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

voor elke n . Omdat $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ volgt het resultaat.

Vele studenten doen het met de begrensde convergentiestelling. Dat kan, maar dat is dan wel zwaar materiaal toepassen om eigenlijk iets eenvoudigs te bewijzen. Zelfs al doe je dit dan volledig correct (wat toch niet altijd het geval was), dan nog krijg je hiervoor niet het maximum van de punten op deze vraag.

Er zijn studenten die voor een deel afschatten (door te gebruiken dat $|\sin(nx)| \leq 1$), dan integreren, en dan de limiet nemen. Ook dat kan, maar weer doe je onnodig werk.

Zelfs bij deze, toch wel gemakkelijke vraag, worden er nog veel fouten gemaakt en ook fouten die wijzen op fundamenteel gebrek aan inzicht. Zo schrijven bijvoorbeeld meerdere studenten dat

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2 + n^2} dx = \frac{1}{n} \text{bgtg} \left(\frac{x}{n} \right)$$

wat natuurlijk niet juist is. Ik vind ook fouten waaruit blijkt dat sommige studenten niet echt juist weten wat puntsgewijze convergentie is, wat het verschil is tussen het begrensds zijn van een rij functies en het begrensds zijn van elke functie in die rij, ...

Ongeveer de helft van de studenten haalt hier voldoende op (wat toch nog weinig is, want de vraag was heel gemakkelijk).

Vraag 7. Vooreerst moet je hier opmerken dat de functie waarover het gaat, nl. $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ continu is op het open interval $]0, 1[$ voor $x > 0$ en $y > 0$. Dus is de functie Riemann integreerbaar op elk gesloten deelinterval. Bijna geen enkele student merkt dit op. Dan bekijk je het problematisch gedrag in de buurt van 0 (wanneer $0 < x < 1$) en in de buurt van 1 (wanneer $0 < y < 1$). Een intuïtief argument (zoals bijvoorbeeld dat de functie in de buurt van 0 niet te snel naar oneindig gaat, met een verwijzing naar Voorbeeld 4.5.i in 'Integratietheorie') heb ik al voldoende gekwoteerd. Maar voor een volledig correct antwoord moet je natuurlijk (1) Propositie 4.6 gebruiken, (2) een goede majorende functie g opgeven en (3) verwijzen naar dat Voorbeeld 4.5.i (met op elk niveau de juiste argumentatie).

Er zijn maar een 5-tal studenten die hier voldoende halen en er is maar 1 student die het echt goed doet.

Bij de antwoorden op deze vraag vind ik bovendien ontzettend veel onzin. Er zijn studenten die beweren dat de functie begrensds is, of zelfs dat ze naar 0 gaat (wat duidelijk niet waar is voor de kritieke waarden van x en y). Er zijn studenten die de limiet nemen voor $x \rightarrow 0$ of voor $x \rightarrow \infty$ (terwijl x en y vaste waarden zijn). En er zijn een paar studenten die beweren dat het product van integreerbare functies weer integreerbaar is, iets wat natuurlijk niet juist is voor oneigenlijke integralen (bekijk $x^{-1} = x^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$ op $]0, 1[$).

Besluit: Wanneer je kijkt naar het aantal geslaagden per vraag, dan kun je min of meer inschatten hoe het globale slaagcijfer voor dit vak er uit zal zien. Er zijn 14 studenten geslaagd op dit examen (op 48). De uitslagen zijn het beste bij de studenten van 1BW en 1BN en veel minder goed voor de andere groepen. Het gemiddelde bedraagt 8.75 (op 20) voor 1BN, 7.96 voor 1BW en slechts 6.60 voor de andere groepen. Het globale gemiddelde is 7.95 op 20. (Op het einde vind je een puntenverdeling). Dit is duidelijk minder goed dan vorig jaar, maar niet zo veel slechter dan het academiejaar ervoor.

Aan de andere kant was het examen wel gemakkelijker dan vorige jaren. Bij de meeste vragen was niet veel creativiteit nodig om voldoende te halen. Vele vragen zijn expliciet in de les behandeld, en/of in de oefeningen en aangezien dit een openboekexamen is waarbij je alles mocht meebrengen ... !?

Het bevestigt de mening die we hebben: Het inzicht bij vele studenten gaat niet diep (en is af en toe echt ondermaats). Ik vrees bovendien dat een grote groep studenten eigenlijk ook niet goed weet wat 'wiskunde begrijpen' betekent. Een van de opmerkingen die ik las op het forum was bijvoorbeeld dat dit 'afstompnd rekenwerk en afschattingen' waren. Dat vind ik echt wel onterecht en hopelijk blijkt dat ook uit mijn commentaren hierboven. Ik dacht nochtans dat ik in de les voldoende heb proberen duidelijk maken waaraan ik belang hecht. Misschien is het slechte resultaat op dit examen dan ook voor een deel te wijten aan

het feit dat er toch redelijk veel studenten op het einde niet meer naar de les kwamen (we zaten dikwijls maar met een goede 30 studenten van de 48 die examen hebben afgelegd). Ook dat er maar zo weinig studenten aanwezig waren toen ik de examenvragen van vorig jaar in de les heb behandeld, speelt misschien mee?

Ik hoop, met de commentaar op de vragen (en op de antwoorden) die ik hier gegeven heb, alleszins meer duidelijkheid te brengen en ook te anticiperen op het feit dat sommige studenten verwonderd zullen zijn over hun punten. Er zijn immers in het eerste jaar nogal wat studenten die menen dat ze een goed examen hebben afgelegd en toch niet geslaagd zijn.

En dan nog een laatste bedenking. Sommige studenten vonden dit examen blijkbaar saai en zelfs inspiratieloos. Dat begrijp ik best en zelf zou ik ook liever een wat meer uitdagend examen opstellen waarbij echt gepeild wordt naar een stevig inzicht in de materie. Maar, wat denk je dat er dan zou gebeuren met de slaagcijfers, die nu al heel laag zijn? Het examen was inderdaad gemakkelijk. Maar ook met dit 'gemakkelijk' examen kan ik wel oordelen wie er niet veel van begrijpt en wie wel. En ik ben ervan overtuigd dat je trouwens bij dit examen zelf voldoende creatief kon zijn om te laten blijken hoe veel inzicht je had en hoe diep het wel ging. Ik hoop dat ook dit duidelijker is geworden met deze tekst.

Juni 2006

-
- (1) Beschouw een willekeurige metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling A van V . Toon nauwkeurig aan dat het inwendige van het complement A^c van A gelijk is aan het complement van de sluiting $\overline{A}$ van A (cfr. Opgave 3.16 uit 'Metrische ruimten'). Illustreer je resultaat met een of twee voorbeelden.
- (2) We hebben de definities van *continuïteit* (Definitie 5.1 uit 'Metrische ruimten') en van *gelijkmatige continuïteit* (Definitie 5.13). Wat is het verschil tussen beide, wat is het verband, ... ? Illustreer je commentaar met voorbeelden. Toon vooral aan dat je beide begrippen (en de relatie tussen beide) goed begrijpt!
- (3) Definieer een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ als $x > 0$ en $f(x) = 0$ als $x \leq 0$. Bewijs dat f twee maal continu differentieerbaar is. In feite is f oneindig keer differentieerbaar, maar dat moet je niet aantonen. Geef wel wat (verstandige) commentaar.
- (4) Hoe moet een formule als

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$

op een correcte manier geïnterpreteerd worden? Bespreek en illustreer je antwoord.

- (5) Beschouw het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ bepaald door de grafiek van de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 1.$$

Zoek het punt, of de punten op dit oppervlak die het dichtst liggen bij de oorsprong. Maak een tekening en bespreek je resultaat. Cfr. Opgave 5.4 uit 'Afgeleiden II'.

- (6) Definieer een rij continue functies $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{x^2 + n^2}.$$

Bewijs dat $\int_0^{2\pi} f_n(x) dx \rightarrow 0$ wanneer $n \rightarrow \infty$ (cfr. Opgave 2.9 uit 'Integratietheorie').

Aanwijzing: Je hoeft de integralen niet te berekenen om dit aan te tonen.

- (7) Bewijs nauwkeurig dat de functie die gebruikt wordt in Definitie 4.11 ('Speciale functies') om de B-functie te definiëren, integreerbaar is (cfr. Opgave 4.4).

Veel geluk

Puntenverdeling:

20	
19	
18	x
17	x
16	
15	x
14	xx
13	xx
12	x
11	
10	xxxxx x
9	xxxx
8	xxx
7	xxxxx xxxxx
6	xxxxx
5	xxxxx
4	xx
3	xxxx
2	
1	x
0	