Bespreking Examen Analyse 1 (Juni 2007)

Vooraf: Zoals ik ook vorig jaar in juni en in september gedaan heb, geef ik hier bedenkingen bij het examen van deze junizittijd. Ik zorg ervoor dat deze tekst op toledo komt, voor de deliberatie.

De vragen vind je achteraan. En daarna de globale uitslagen.

Eerst nog een algemene opmerking. Vele antwoorden zijn toch nog erg slordig neergeschreven en niet altijd goed leesbaar. Dat zal wel iets met tijdsdruk te maken hebben, maar toch ... Misschien moet je ook meer op voorhand oefenen in het goed opschrijven van antwoorden en zo wat ervaring opdoen, zodat je dat niet voor de eerste keer op een examen moet doen?

Vraag 1. Deze vraag was een variante op opgave 3.8 ('Metrische ruimten') uit de nota's. Merk op dat in die opgave sprake is van een volledige metrische ruimte, maar volledigheid is natuurlijk niet nodig. Een oplossing voor deze opgave is te vinden op de website van Wina. De oplossing is zeer eenvoudig.

Je moest hier antwoorden dat de verzameling $\mathcal{P}$ een familie is van open verzamelingen en dat $\mathcal{Q}$ een familie is van gesloten verzamelingen. Verder moest je dan argumenteren dat $V \setminus U$ open is en $U \setminus V$ gesloten als V open is en U gesloten (zoals bij die opgave). Dat doe je door te schrijven dat $V \setminus U = V \cap U^c$ en $U \setminus V = U \cap V^c$ en te gebruiken dat de doorsnede van twee opens open is, de doorsnede van twee geslotens gesloten en het complement van een open gesloten is en omgekeerd. Dit was dus geen moeilijke vraag.

Sommige studenten bewijzen een van deze gevallen, maar slagen er niet in om het andere, analoge geval te bewijzen - iets wat ik een beetje raar vind. Andere studenten geven bewijzen die moeilijker zijn dan nodig. En dan is er nog een groep van studenten die geen onderscheid maakt tussen de *familie van verzamelingen* aan de ene kant en de *unie van de verzamelingen* uit die familie aan de andere kant. Ze zeggen dan bijvoorbeeld dat $\mathcal{P}$ open is en dat je over $\mathcal{Q}$ niets kan zeggen, tenzij je met eindig veel verzamelingen werkt. Dat is natuurlijk zinloos en beschouw ik als een gebrek aan inzicht.

Het gemiddelde op deze vraag is 2.95 op 5.

Vraag 2. Ook deze vraag is een variante op een opgave uit de nota's (Opgave 4.3 uit 'Metrische Ruimten'). Deze opgave is gemaakt in de oefeningenzittingen en de oplossing vind je ook op de website van Wina.

De verzameling A is niet compact want ze is niet gesloten. Je vindt immers een rij in A die naar 1 convergeert terwijl 1 niet in A zit. Het is ook niet zo moeilijk om een open overdekking te vinden zonder eindige deeloverdekking. Neem bijvoorbeeld de intervallen $]-1+\delta, +\infty[$ waarbij $\delta > 0$. De verzameling B is wel compact want ze is gesloten en begrensd.

Er zijn verschillende studenten die een verkeerd beeld hadden van de verzamelingen A en B. Iemand schreef bijvoorbeeld dat $A =]-1, 1[$ en $B = [-1, 1]$. Sommige andere studenten hadden iets gelijkaardigs. Dat is natuurlijk helemaal fout. Verschillende open overdekkingen konden gebruikt worden, maar ook hier werden toch soms fouten gemaakt (bijvoorbeeld door geen open verzamelingen te nemen - of geen overdekking). Om aan te tonen dat B wel compact is, hebben heel wat studenten zich laten leiden door de oplossing van opgave 4.3. Ze hebben de verzameling bekeken als een unie van twee verzamelingen die elk een convergente rij en de limiet ervan bevatten. Dan is het niet moeilijk aan te tonen dat elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft (zie bijvoorbeeld de oplossing op de website van Wina). Dit is een goed antwoord. Studenten die bewijzen dat B compact is door aan te tonen dat de verzameling begrensd en gesloten is, bewijzen dikwijls niet op een correcte wijze dat B gesloten is.

Het gemiddelde op deze vraag is 2.34 op 5.

Vraag 3. De rij van functies waar het hier over gaat, vind je terug in Opmerkingen 2.4 ('Afgeleiden I'). Daar vind je dat deze rij functies punstgewijs convergeert en wat de limiet is.

Uniforme convergentie bewijs je op $[\delta, +\infty[$ door een eenvoudige afschatting. Op het negatief stuk gaat het analoog. En dan neem je beide gevallen samen door het maximum van de gevonden n_1 en n_2 te nemen. Omdat de uniforme limiet van continue functies zelf ook continu moet zijn, vind je direct dat je geen uniforme convergentie op gans $\mathbb{R}$ kan krijgen.

Er zijn een aantal studenten die de Stelling van Dini gebruiken, maar dat kan niet op een onbegrensd interval. Er zijn ook nog studenten die verkeerd afschatten. Ze schrijven bijvoorbeeld, voor $t \geq \delta$ dat

$$\left| \frac{nt}{1+nt} - 1 \right| \leq \left| \frac{nt}{nt} - 1 \right| = 0 < \varepsilon.$$

Dit kan natuurlijk niet juist zijn omdat het linkerlid positief is en als het kleiner moet zijn dan 0, dan zou het zelf ook 0 moeten zijn.

Het gemiddelde op deze vraag is 1.86 op 5.

Vraag 4. Een goed en volledig antwoord besteed hier aandacht aan verschillende aspecten van het bewijs.

Vooreerst moest je toch iets zeggen over het feit dat men zich kan beperken tot het geval $p = 2$ en dan tot het geval waarbij de twee indices verschillend zijn. Je moest daar niet veel over schrijven maar toch iets zodat je aantoonde dat je begreep dat ook hier reeds meer uitleg nodig is.

Vervolgens moest je goed uitleggen hoe je precies deze eerste keer de middelwaardestelling toepast. Hier komt meer bij kijken dan de meeste studenten beseffen. Om te beginnen moet je uitleggen op welke functie je de middelwaardestelling precies toepast. Dit is niet de oorspronkelijk functie f maar wel de functie $g : t \mapsto f(t, x_2) - f(t, a_2)$. Wanneer je x voldoende dicht bij a kiest zal deze functie gedefinieerd zijn op het interval met eindpunten a_1 en x_1. Dit is zo omdat A open is en $a \in A$. De functie g is dan continu op dit gesloten interval en differentieerbaar op het open interval omdat f partieel afleidbaar is naar de eerste veranderlijke in de open verzameling A. De middelwaardestelling levert dan een punt y_1 tussen a_1 en x_1 zodat $g(x_1) - g(a_1) = g'(y_1)(x_1 - a_1)$. Wanneer je dit uitschrijft bekom je dan de eerste formule uit het bewijs in de nota's.

Dan pas je een tweede keer de middelwaardestelling toe. Deze keer op de functie $h : s \mapsto (D_1 f)(y_1, s)$ en het interval met eindpunten a_2 en x_2. Weer door x voldoende dicht bij a te kiezen is deze functie op zo'n interval goed gedefinieerd, continu op het gesloten interval en differentieerbaar op het open inteval. Dit laatste omdat $D_1 f$ partieel differentieerbaar wordt verondersteld op A. Dit levert dan een punt y_2 tussen de randpunten a_2 en x_2 zodat $h(x_2) - h(a_2) = h'(y_2)(x_2 - a_2)$ en dat betekent $(D_1 f)(y_1, x_2) - (D_1 f)(y_1, a_2) = (D_2 D_1 f)(y_1, y_2)(x_2 - a_2)$.

Het was niet zo belangrijk om ook het analoge geval nog eens in detail uit te leggen. Eventueel kon je hier zeggen dat je eerst de middelwaardestelling toepast op de functie $s \mapsto f(x_1, s) - f(a_1, s)$ op het interval met randpunten a_2 en x_2.

Ook het gebruik van de continuïteit van de dubbele partiële afgeleiden moest je wat verder uitleggen. Je kon een ε kiezen en δ_1 en zodat $|(D_1 D_2 f)(x) - (D_1 D_2 f)(a)| < \varepsilon$ als $\|x - a\| < \delta_1$ en dan opmerken dat uit $\|x - a\| < \delta_1$ ook volgt dat $\|(z_1, z_2) - (a_1, a_2)\| < \varepsilon$. Analoog neem je dan een δ_2 voor het andere geval. En uiteindelijk veronderstel je dan dat $\|x - a\| < \delta$ waarbij $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Er zijn maar heel weinig studenten die hier goed op antwoorden. Zo zijn er niet zo heel veel studenten die precies zeggen op welke functies je de middelwaardestelling toepast. Regelmatig wordt ook de fout gemaakt om de stelling twee keer toe te passen, bijvoorbeeld op de functies $t \mapsto f(t, x_2)$ en $t \mapsto f(t, a_2)$. Het probleem daarbij is dat je dan in principe twee verschillende punten y_1 krijgt.

De gemiddelde score bedraagt hier 1.81 op 5 en dat is niet veel. Ik besluit hieruit dat studenten bij het studeren niet voldoende kritisch zijn. Wanneer je bijvoorbeeld een bewijs als dat van Propositie 1.6 instudeert, zou je je dan reeds moeten afvragen waarom precies al deze stappen mogen gezet worden. Je zou je dan al moeten afgevraagd hebben op welke functies je precies de middelwaarstestelling toepast, waarom dat mag, ... Indien je dat had gedaan, dan zou je op het examen gewoon maar je uitwerking van het bewijs moeten overschrijven uit je eigen nota's. Je mocht immers alles meebrengen. Ik denk dat de slechte gemiddelde score op deze vraag ook aantoont dat studenten te weinig inzicht hebben in de materie - en vermoedelijk zelfs dat studenten dat bovendien ook niet beseffen.

Vraag 5. Hier zal het voor velen niet zo duidelijk geweest zijn wat er precies moest geantwoord worden. Belangrijk is dat je verstandige dingen schrijft.

Je kan bijvoorbeeld eerst wijzen op de gelijkenissen. Beide stellingen gaan over de vraag of je aan de afgeleiden kan zien of een punt een lokaal minimum of een lokaal maximum is. Telkens eis je dat de functie een aantal keer continu afleidbaar is. Ook het bewijs is gelijkaardig. Het steunt op de stelling van Taylor.

Wat zijn nu de verschillen? In het ene geval heb je een functie van één veranderlijke en in het andere geval een functie van meerdere veranderlijken. In die zin kan je zeggen dat de tweede stelling algemener is dan de eerste. Dat is echter niet waar omdat je in het eerste geval naar hogere orde afgeleiden gaat kijken en in het tweede geval enkel maar naar de tweede orde afgeleiden.

Geen van beide stellingen is dus een veralgemening van de andere. Toch kun je iets meer zeggen. Stelling 5.7 is immers ook waar voor functies van één veranderlijke en Stelling 5.2 is ook waar voor $n = 2$. In die beide gevallen zijn beide resultaten (bijna) dezelfde. Immers, voor $p = 1$ herleidt de matrix in Stelling 5.7 gewoon tot een getal en dat is dan precies $f''(a)$. Als deze afgeleide nu niet nul is, dan geeft het resultaat uit stelling 5.7 precies het resultaat uit Stelling 5.2 voor $n = 2$. Zowel in het ene als in het andere geval kan je niets besluiten als die tweede afgeleide 0 is.

Je kan dit nu verder nog illustreren met voorbeelden. Als je de functie $x \mapsto x^2$ bekijkt in 0, dan kun je beide stellingen gebruiken om te besluiten dat je een lokaal minimum hebt. Als je echter de functie $x \mapsto x^4$ bekijkt, dan kun je wel nog 5.2 gebruiken, maar niet meer 5.7. Voor functies van meerdere veranderlijken, kun je hoe dan ook niets doen met stelling 5.2.

Het gemiddelde op deze vraag is 1.95 op 5.

Vraag 6. We hebben aanvankelijk de integraal $\int_a^b f(s)ds$ gedefinieerd indien $[a, b]$ een begrensd gesloten interval is en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde Riemann integreerbare functie. Omdat f op gans $\mathbb{R}$ is gedefinieerd en continu wordt verondersteld, moeten we ons over dat laatste geen zorgen maken. Wel is er een probleem omdat niet noodzakelijk $p(t) < q(t)$ voor elke t. Hiervoor kun je verwijzen naar Notatie 3.1 (uit Integratietheorie). De afspraak moet dan ook gemaakt worden dat $\int_a^b f(s)ds = 0$ als $a = b$. Dan is de functie g netjes gedefinieerd.

Kies nu een willekeurig punt $a \in \mathbb{R}$ en schrijf

$$g(t) = \int_a^{q(t)} f(s)ds - \int_a^{p(t)} f(s)ds.$$

Hiervoor verwijs je naar Propositie 3.2 en de opmerkingen die daarop volgen. Dan moet je Propositie 3.3 gebruiken. Strikt genomen zou dan a voldoende klein moeten gekozen worden zodat $a < p(t)$ en $a < q(t)$ voor t in de omgeving van het punt waarin je wil aantonen dat g differentieerbaar is. Dat kan omdat de functies p en q continu zijn en dus begrensd op begrensde intervallen. Uiteindelijk gebruik je dan nog dat de samenstelling van differentieerbare functies differentieerbaar is, evenals het verschil van differentieerbare functies. Dit levert dan de differentieerbaarheid van g en dat $g'(t) = f(q(t))q'(t) - f(p(t))p'(t)$ voor elke t.

De meeste studenten hebben maar weinig of geen aandacht besteed aan het probleem van de grenzen, nodig voor het strikt toepassen van bijvoorbeeld Propositie 3.3. Sommigen hebben dat wel gedaan, maar niet heel goed.

Er zijn ook een aantal studenten die gewerkt hebben met een functie F van twee veranderlijken, gedefinieerd door $F(x, y) = \int_x^y f(s)ds$. Dan hebben ze de kettingregel voor functies van meerdere veranderlijken toegepast. Dat is wel een hele omweg en het vergroot de risico's op slechte en onvolledige argumenten en op fouten. De gegeven oplossing hierboven is duidelijk beter.

Merk verder nog op dat deze vraag een variant was op opgave 3.2, die gemaakt was in de oefeningenzittingen en waarvan je ook een oplossing vind op de examenwiki van Wina.

Het gemiddelde op deze vraag is 2.15 op 5.

Vraag 7. Het ging hier om opgave 4.9 uit de nota's (Speciale functies). Het komt gewoon neer op het gebruiken van de goede subsitutie. Het beste is $t = \sin^2(\theta)$ te nemen in de integraal met de tangens. Dan kom je onmiddellijk uit bij de uitdrukking voor de Beta functie. Eventueel moet je nog opmerken dat $B(x, y) = B(y, x)$ voor alle x, y. Dit volgt gemakkelijk uit de definitie of uit de formule in Propositie 4.12.

Je kon de formule ook vinden door te steunen op de formule in de opgave 4.8 (maar die moest je dan natuurlijk ook bewijzen). Verder zijn er nog studenten die Propositie 4.13 gebruikt hebben om de integraal echt uit te rekenen. Dat mocht wel, maar dat was niet gevraagd.

Het gemiddelde op deze vraag is 2.24 op 5.

Besluit: Er zaten drie vragen bij die varianten waren op opgaven die in de oefeningen gezien waren en/of waarvan antwoorden terug te vinden waren op de examenwiki van Wina (vragen 1, 2 en 6). Er was verder nog een vraag die een opgave was uit de cursusnota's (vraag 7). Er zaten twee vragen tussen waarbij argumentaties uit de nota's moesten vervolledigd worden (vraag 3 en vraag 4). Uiteindelijk was er nog een 'bespreekvraag' bij waarbij twee eigenschappen met elkaar moesten vergeleken worden.

De uitslagen zijn een beetje beter dan anders. Er zijn 19 studenten op 40 die voldoende halen (10 of meer) en het globale gemiddelde is 9.0 op 20. Er is niet zo'n groot verschil tussen bijvoorbeeld het 1BW en 1BN wat het percentage geslaagde studenten en het gemiddelde betreft. Wel vind je de hoogste scores terug bij 1BN.

Juni 2007

Analyse 1 Reeks 1 Datum: 21 juni 2007 Naam:

---

(1) Beschouw een willekeurige metrische ruimte (X,d), een familie $\mathcal{F}$ van open deelverzamelingen van X en een familie $\mathcal{G}$ van gesloten deelverzamelingen. Definieer nu twee nieuwe families $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ door

$$\mathcal{P} = \{V \setminus U \mid V \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{G}\}$$
$$\mathcal{Q} = \{U \setminus V \mid V \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{G}\}.$$

Wat weet je dan over deze families van deelverzamelingen van X?

(2) Beschouw de volgende twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ (met de gewone metriek):

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$$
$$B = A \cup \{-1, 1\}.$$

Zijn deze verzamelingen compact? In het geval de verzameling niet compact is, geef dan een open overdekking zonder eindige deeloverdekking.

(3) Definieer een rij functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_n(t) = \frac{nt}{1+n|t|}$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$. Kies $\delta > 0$. Toon aan dat de rij (f_n) uniform convergeert op $\mathbb{R} \setminus]-\delta, \delta[$, maar niet op gans $\mathbb{R}$.

(4) Werk het bewijs van Propositie 1.6 (Afgeleiden II) in detail uit. Toon hierbij dat je dit bewijs goed begrijpt.

(5) Vergelijk Stelling 5.2 met Stelling 5.7 (uit 'Afgeleiden II') en bespreek. Illustreer eventueel met voorbeelden. Cfr. Opmerkingen 5.8.i en 5.8.ii.

(6) Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu en $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Definieer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$g(t) = \int_{p(t)}^{q(t)} f(s)\, ds.$$

Toon aan dat g differentieerbaar is. Wat is de afgeleide?

(7) Toon aan dat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

(waarbij B de Beta functie is).

Veel geluk

Puntenverdeling:

20	
19	x
18	
17	x
16	x
15	xxx
14	xx
13	xxxxx
12	xx
11	
10	xxxx
9	
8	xxxx
7	xxxx
6	xxx
5	xxx
4	x
3	xx
2	x
1	xx
0	x